

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Укажите количество простых чисел, принадлежащих промежутку $[1; 17]$ ОТВЕТ: _____

№2. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 30%, а другое – на 20%? ОТВЕТ: _____

№3. Дана функция $y = \frac{x}{3} + 2$. Чему равна площадь треугольника, который образуется графиком этой функции и осями координат? ОТВЕТ: _____

№4. Большее основание трапеции равно 24. Найдите её меньшее основание, зная, что расстояние между серединами её диагоналей равно 4. ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. В двузначном числе цифра десятков на 3 меньше цифры единиц. Когда число разделили на цифру десятков, то в частном получилось 11, а в остатке число, которое меньше делителя на 1. Найдите двузначное число. ОТВЕТ: _____

№6. Найдите сумму остатков от деления числа 75437984216047 на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25, 100

ОТВЕТ: _____

№7. Пусть $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 2$. Найдите $x_1^4 + x_2^4$ ОТВЕТ: _____

№8. Вычислите $\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}} + \frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2$ ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. В геометрической прогрессии с чётным числом членов сумма всех членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечётных местах. Найдите знаменатель прогрессии. ОТВЕТ: _____

№10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + x + y = 6, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - y = 2 \end{cases}$ В ответе укажите произведение всех значений переменных x, y , входящих в решение ОТВЕТ: _____

№11. Параболы $y = -5(x - 3)^2 + 4$ и $y = ax^2 + bx + c$ симметричны относительно прямой, проходящей через их общую вершину параллельно оси абсцисс. Найдите сумму коэффициентов a, b, c

ОТВЕТ: _____

№12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CK . Площади треугольников BEK, ABC равны $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$ соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BEK , если $AC = 3\sqrt{2}$ ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. $ABCD$ – ромб. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает большую диагональ ромба AC в точке E . Найдите площадь ромба, если $AB = 20, CE = 7$ **ОТВЕТ:** _____

№14. Решите уравнение $|x \cdot |x - 1| - 2x| = x^2 - 2$. В ответе укажите произведение корней

ОТВЕТ: _____

№15. Вершины B и C при основании равнобедренного треугольника ABC соединены с серединой M его высоты, проведённой из вершины A . Эти прямые пересекают боковые стороны AC, AB треугольника в точках D, E соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $AEMD$, если площадь треугольника ABC равна 186 **ОТВЕТ:** _____

№16. Одновременно начали гонки с одного старта в одном направлении два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта в том же направлении отправился третий гонщик. Найдите скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого на 1 час 15 минут позже, чем второго **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Дан квадратный трёхчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые значения x , при которых значения этого трёхчлена являются квадратами простых чисел **ОТВЕТ:** _____

№18. У Васи есть 9 палочек по 5 см и 9 палочек по 6 см. Он хочет, разломав несколько палочек, сложить из всех получившихся кусков равносторонний 11-угольник. Каким наименьшим количеством разломов он может обойтись? **ОТВЕТ:** _____

№19. Найдите количество совпадающих членов у двух прогрессий: 3; 15; 27; ...; 363 и 7; 12; 17; ...; 352 **ОТВЕТ:** _____

№20. Через точку A , лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r , проведена прямая на расстоянии $r/2$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B, C . Найдите длину отрезка AB , если $r = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}$ **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{9}{x} > x$ ОТВЕТ: _____

№2. 31 декабря Юра, Маша и Алеся съели 8% всех конфет, подаренных им на новогодние праздники, а 1 января – 0,125 всех конфет. Сколько грамм конфет съели дети 1 января, если 31 декабря ими было съедено 320 г конфет? ОТВЕТ: _____

№3. Найдите отношение среднего арифметического к среднему геометрическому корней уравнения $2x^2 + 9x + 8 = 0$ ОТВЕТ: _____

№4. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 4,6; 4,2; 3,8...? ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120° , а высота, проведенная к основанию, равна 10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника. ОТВЕТ: _____

№6. Из 44 кг свежих грибов, содержащих 90% воды, получили 5 кг сушеных грибов. Каков процент содержания воды в сушеных грибах? ОТВЕТ: _____

№7. В треугольнике с вершинами $A(14; -13), B(16; -14); C(17; -17)$ угол при вершине B в градусах равен... ОТВЕТ: _____

№8. Найдите сумму наибольшего целого отрицательного и наибольшего целого положительного решений неравенства $|x^2 + 3x - 9| - |x^2 - 3x - 9| < 0$ ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Две медианы треугольника равны $9\sqrt{3}$ и 12 и пересекаются под углом 60° . Найдите площадь треугольника. ОТВЕТ: _____

№10. В пяти коробках лежали яблоки: не менее одного в каждой, в разных коробках разные количества, в одной из коробок лежало ровно 1 яблоко. Оказалось, что для того, чтобы уравнять количества яблок в коробках, в них в общей сложности нужно было добавить 15, но не менее, яблок. Сколько яблок могло лежать в той коробке, где их было больше всего? ОТВЕТ: _____

№11. Найдите пятый член геометрической прогрессии, состоящей из восьми членов, если сумма её членов с чётными номерами равна 1360, а с нечётными 680. ОТВЕТ: _____

№12. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Через точку пересечения его медиан проведены прямые, параллельные меньшим сторонам. Площадь полученного при этом треугольника равна 4. Найдите площадь исходного треугольника. ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 - x - 28) + (x^2 - x - 26) + (x^2 - x - 24) + \dots + (x^2 - x) = -120 \text{ ОТВЕТ: } \underline{\hspace{2cm}}$$

№14. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{1+x^2-2x}{2x^2+20x+50} + \frac{9+x^2+6x}{2x^2-4x+2} \geq \frac{x+3}{x+5}$, принадлежащих отрезку $[-10; 10]$ ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

№15. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала к работе приступил только один рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Когда $\frac{1}{6}$ часть всех деталей была изготовлена, к работе присоединился третий рабочий. Работу они закончили одновременно, причём каждый изготовил одинаковое количество деталей. Сколько времени работал второй рабочий, если известно, что он работал на два часа больше третьего и что первый и второй, работая вместе, могли бы изготовить всё требуемое количество деталей на 9 часов раньше, чем это сделал бы третий, работая отдельно. ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

№16. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника ABC , взята точка M . Известно, что расстояние от точки M до одной из вершин треугольника равно 9. Найдите сумму расстояний от точки M до двух других вершин треугольника. ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Найдите все целые значения переменных x и y , удовлетворяющих уравнению

$$3x^2 - 2y - 6x + xy = 17. \text{ В ответе укажите сумму всех таких } y. \text{ ОТВЕТ: } \underline{\hspace{2cm}}$$

№18. Петя складывал два числа и по ошибке в конце одного из них приписал лишнюю цифру. В результате он вместо суммы 12345 получил сумму 44444. Какие числа должен был складывать Петя первоначально? ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

№19. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что площади треугольников AOB, BOC, COA равны 30, 28 и 26 соответственно. Найдите стороны треугольника ABC . ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

№20. Натуральное четырёхзначное число b , кратное 5 и не кратное 3, можно представить в виде суммы куба и квадрата одного и того же натурального числа. Найдите число b или сумму таких чисел, если их несколько. ОТВЕТ: $\underline{\hspace{2cm}}$

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите число целых решений неравенства $(x + 5)^2(x - 3)(x - 7) \leq 0$. **ОТВЕТ:** _____

№2. Чему равна сумма ординат точек пересечения графиков функций $y = 2x^2 + 4x - 8$ и $y = 3x + 7$?
ОТВЕТ: _____

№3. В равнобедренную трапецию с основаниями 2 и 8 вписана окружность. Найдите площадь трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№4. Площадь треугольника со сторонами 7 и 8 равна $7\sqrt{7}$. Найдите наибольшую возможную длину третьей стороны треугольника. **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144. **ОТВЕТ:** _____

№6. $x^2 + 3x - 1 = 0$. Вычислите $x_1^3 + x_2^3$, где x_1, x_2 – корни уравнения. **ОТВЕТ:** _____

№7. Вычислите $\sin 225^\circ \cdot \cos 105^\circ + \cos 315^\circ \cdot \sin 285^\circ$. **ОТВЕТ:** _____

№8. Если собранные в саду яблоки разложить в корзины по 25 штук, то 8 яблок останется без корзины. Если то же количество яблок разложить в то же количество корзин по 27 штук, то в одной из корзин будет на 12 яблок меньше, чем в остальных. Найдите сумму $M + P$, где M – количество корзин, а P – количество собранных яблок. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Катет прямоугольного треугольника равен 18. Точка, принадлежащая данному катету, удалена от гипотенузы и другого катета на 8. Найдите периметр треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№10. График квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = -2$, а нули функции находятся на расстоянии 6 друг от друга. Наибольшее значение функции равно 18. Найдите значение функции в точке $x = 5$. **ОТВЕТ:** _____

№11. О натуральных числах a, b известно, что $a > b$, $\text{НОК}(a, b) = 420$, $a + b = 170$. Найдите $a - b$.
ОТВЕТ: _____

№12. Найдите произведение целых корней уравнения $|x^2 + 3x - 40| + |x^2 + 8x - 20| = 5x + 20$.
ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных Колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на 2 рыбы меньше, а Ваня – на 12 меньше, чем на самом деле, то количество рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани? **ОТВЕТ:** _____

№14. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях биссектрис данного треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№15. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\sqrt{35 - x^2 - 2x}(x^2 + 7x + 12)(x - 12) \geq \sqrt{35 - x^2 - 2x}(x^2 - 9x - 36)(x + 3) \quad \text{ОТВЕТ: } \underline{\hspace{2cm}}$$

№16. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O , пересекающая отрезок BO в точке P так, что $OP = 4, PB = 8$. Прямые AP, CP пересекают стороны BC и AB треугольника в точках K, M соответственно. Найдите значение выражения $CK^2 + AM^2 - AC^2$. **ОТВЕТ:** _____

Уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. В ящик вложили 5 ящиков. В каждый из этих ящиков либо опять вложили 5 ящиков, либо не вложили ни одного. Данная процедура повторилась несколько раз. В результате наполненных ящиков оказалось 25. Найдите, сколько процентов составляет количество пустых ящиков от количества наполненных. **ОТВЕТ:** _____

№18. Рыболов, охотник и грибник идут в одном направлении с постоянными скоростями. Когда рыболов и охотник находились в одной точке, грибник отставал от них на 220 м. Когда грибник догнал охотника, рыболов отставал от них на 180 м. Найдите расстояние (в м) между охотником и рыболовом в тот момент, когда грибник и рыболов находились в одной точке. **ОТВЕТ:** _____

№19. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение трёх натуральных чисел, если их сумма равна 407 (приведите пример)?

ОТВЕТ: _____

№20. Найдите все такие натуральные числа n , для которых число $n^4 - 22n^2 - 46$ делится без остатка на $n + 5$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1	5	9	13	17
2	6	10	14	18
3	7	11	15	19
4	8	12	16	20
ИТОГ				

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите сумму двух последовательных натуральных чисел, квадрат суммы которых на 112 больше суммы их квадратов. **ОТВЕТ:** _____

№2. Дан прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 12. Найдите периметр прямоугольника, имеющего с треугольником общий угол и одна из вершин которого лежит на гипотенузе треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№3. Вычислите $\frac{\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2 + \sqrt{11+2\sqrt{10}}}}{8}$ **ОТВЕТ:** _____

№4. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x-4} \geq \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{2x+11}$ **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите значение выражения $x^4 + y^4 + x^2y - y^2x$, если $x - y = 3$ и $xy = 1$. **ОТВЕТ:** _____

№6. После двух последовательных повышений зарплата возросла в 7 раз. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было в 4 раза больше первого? **ОТВЕТ:** _____

№7. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $3\sqrt{3}$. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит высоту, проведённую к этой стороне, в отношении 1:3, считая от вершины. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между другими сторонами треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№8. Найдите значение выражения $6ctg(\operatorname{arccotg} \frac{2}{3}) - 2\operatorname{arccos} \frac{\sqrt{2}}{2}$. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Найдите сумму всех натуральных чисел, больших 6 и не превосходящих 137, которые при делении на 6 дают в остатке 2. **ОТВЕТ:** _____

№10. Найдите значение выражения $\frac{tg37,5^\circ + ctg37,5^\circ}{\sin 165^\circ}$ **ОТВЕТ:** _____

№11. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 2y + 5) = 8$. В ответ запишите сумму корней $x + y$. **ОТВЕТ:** _____

№12. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 9, длина биссектрисы BD равна $3\sqrt{3}$, а длина отрезка DC равна 2. Найдите удвоенный периметр треугольника ABC . **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Найдите сумму цифр наименьшего натурального числа, которое при делении на 5; 6 и 7 даёт в остатке соответственно 1; 4 и 3. **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите удвоенную сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения

$$\frac{2x^2 + 5x + 15}{2x^2 + 5x + 3} - \frac{2x^2 + 5x + 13}{2x^2 + 5x + 5} = 1$$

ОТВЕТ: _____

№15. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу одновременно из пунктов A и B и встретились через 1 час. Прибыв в пункты B и A соответственно, велосипедисты повернули назад с прежними скоростями и встретились вновь. Через сколько часов после первой встречи это произошло?

ОТВЕТ: _____

№16. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены медиана и высота, расстояние между их основаниями равно 1. Найдите катеты треугольника, если известно, что один из них в два раза больше другого. ОТВЕТ: _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Решите в целых числах уравнение $x^3 - x = 2013$. ОТВЕТ: _____

№18. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E , где расстояние AE составляет треть длины AC , а на стороне AD взята точка F , где расстояние AF составляет четверть длины AD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырёхугольника $ABGE$, где G – точка пересечения прямой FE со стороной BC , равна 8. ОТВЕТ: _____

№19. Через сколько минут после того, как часы показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую? ОТВЕТ: _____

№20. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2y + z = 19, \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 133, \\ xz = 4y^2 \end{cases}$ ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1	5	9	13	17
2	6	10	14	18
3	7	11	15	19
4	8	12	16	20
ИТОГ				

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найдите первый член и разность этой прогрессии. **ОТВЕТ:** _____

№2. Вычислите $\frac{\left(\left(6,2:0,31-\frac{5}{6}\cdot 0,9\right)\cdot 0,2+0,15\right):0,04}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,1\right)\cdot \frac{1}{33}}$ **ОТВЕТ:** _____

№3. Найдите значение выражения $\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ **ОТВЕТ:** _____

№4. Найдите квадрат расстояния между точками, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13, \\ x + y = 4 \end{cases}$ **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Диагональ правильной четырёхугольной призмы образует угол 60° с плоскостью основания. Во сколько раз площадь боковой поверхности призмы больше суммы площадей её оснований? **ОТВЕТ:** _____

№6. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых $\frac{12}{n-5}$ является целым числом **ОТВЕТ:** _____

№7. Найдите произведение корней уравнения $(x^2 + 3x + 3)(1 - 3x - x^2) + 21 = 0$. **ОТВЕТ:** _____

№8. Число 58 разделили на некоторое натуральное число и получили, что неполное частное на 6 меньше остатка, а делитель на 2 больше остатка. Найдите остаток. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найдите длину высоты трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№10. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через два часа из пункта A в пункт B выехал автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 20 минут после выезда. Сколько времени провёл в пути от A до B мотоциклист? **ОТВЕТ:** _____

№11. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф. **ОТВЕТ:** _____

№12. Найдите значение выражения $65 \cos\left(\arcsin \frac{5}{13} - 2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP, CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 64, площадь четырёхугольника $AQPC$ равна 48, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Вычислите длину отрезка PQ .

ОТВЕТ: _____

№14. От двух кусков сплавов весом 12 кг и 8 кг с различным процентным содержанием цинка было отрезано по куску равного веса. Каждый из кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание цинка в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков? **ОТВЕТ:** _____

№15. В окружность радиуса $12\sqrt{\sqrt{6}-2}$ вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении 6:7:11. Найдите площадь треугольника.

ОТВЕТ: _____

№16. (Старинная китайская задача). Сколько можно купить ровно на 100 монет петухов, кур и цыплят, если всего надо купить 100 птиц, причём петух стоит 5 монет, курица – 4, а 4 цыплёнка – одну монету? **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. В кофейне встретились 55 индийцев и турков, каждый из которых пил либо чай, либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и обманывают, когда пьют кофе, а все турки – наоборот. На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответили «Да» 44 человека, а на вопрос «Вы турок?» - 33 человека. С утверждением «На улице идёт дождь» согласились 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пьют чай? **ОТВЕТ:** _____

№18. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 нарисован прямоугольник. Двумя разрезами по линиям сетки его разрезали на 4 прямоугольника. Андрей нашёл площади у трёх из этих прямоугольников и обнаружил, что произведение этих трёх чисел равно 30. Чему равен периметр исходного прямоугольника? Найдите все варианты ответа. **ОТВЕТ:** _____

№19. Для каждой пары целых положительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 6y = 8, \text{ вычислите сумму } x + y. \text{ В ответ запишите наибольшую из этих сумм.}$$

ОТВЕТ: _____

№20. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найдите все числа, из которых состоит A .

ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Чему равен внутренний угол правильного 10-угольника? ОТВЕТ: _____

№2. Найдите число, 3,6% которого составляют $\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-2\frac{1}{3})\cdot 0,3125}$ ОТВЕТ: _____

№3. Чему равно число натуральных решений неравенства $\sqrt{x} > -2$ на интервале $[2; 8]$? ОТВЕТ: _____

№4. Вычислите $tg \frac{3\pi}{4} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos 5\pi$ ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 и 5. Найдите катеты треугольника и укажите в ответе их произведение. ОТВЕТ: _____

№6. Автомобиль едет со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью (км/ч) он должен ехать, чтобы проезжать каждый километр на $\frac{1}{4}$ мин быстрее? ОТВЕТ: _____

№7. Найдите сумму всех натуральных чисел, больших 7 и не превосходящих 165, которые при делении на 7 дают в остатке 5. ОТВЕТ: _____

№8. Сколько целых решений неравенства $\frac{16+6x-x^2}{x^2-8x-20} \leq \frac{1}{x^2-10x}$ удовлетворяют условию $|x| < 3$? ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Вычислите $14\text{ctg}(\arctg(-2) + \text{arcctg}4)$ ОТВЕТ: _____

№10. Точки E, F – середины соответственно рёбер A_1B_1, BC куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние от точки C_1 до прямой EF , если длина ребра куба равна $2\sqrt{14}$. ОТВЕТ: _____

№11. Найдите четырёхзначное число, у которого сумма двух первых и двух последних цифр равна 13, а сумма квадратов двух последних цифр равна двузначному числу, образованному первыми двумя цифрами искомого числа. Если таких чисел несколько, то в ответе укажите их сумму. ОТВЕТ: _____

№12. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\frac{|x+2|}{2x^2-x-3} > \frac{|x+2|}{x^2+x-20}$
ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Для каждой пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + y^2 + 3xy = 7$, вычислите значение выражения $x - y$ и укажите наименьшее из этих значений, умноженное на количество найденных пар. **ОТВЕТ:** _____

№14. Сумма двух чисел равна 463, а разность их квадратов – простое число. Укажите большее из этих чисел. **ОТВЕТ:** _____

№15. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№16. В треугольнике ABC площадью 90 биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD, CD , причём $BD:CD = 2:3$. Отрезок BL пересекает биссектрису AD в точке E и делит сторону AC на отрезки AL, CL такие, что $AL:CL = 1:2$. Найдите площадь четырёхугольника $EDCL$. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Найдите x_0 – наибольший корень уравнения $\sin^6(\pi x) + \cos^6(\pi x) = \frac{-10x}{25+16x^2}$ и укажите в ответе $24x_0$ **ОТВЕТ:** _____

№18. Найдите все натуральные числа m , при которых дробь $\frac{13m-1}{3m+5}$ равна целому числу. **ОТВЕТ:** _____

№19. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 8x\sqrt{2} + 64} + \sqrt{x^2 - 15x\sqrt{2} + 225} = 17$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Какое число стоит на 2024-м месте в последовательности 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...? **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Вычислите $\frac{(1\frac{13}{20}-1,5)\cdot(\frac{5}{3}-1,5)}{(2,44+1\frac{14}{25})\cdot 0,0625}$ ОТВЕТ: _____

№2. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых $\frac{12}{n-5}$ – целое число.
ОТВЕТ: _____

№3. Найдите $\cos 2x$, если $\cos(x + 90^\circ) = \frac{1}{3}$. ОТВЕТ: _____

№4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если сумма длин катетов равна 15, а гипотенуза равна $5\sqrt{5}$. ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Если от квадрата отрезать параллельно его стороне полоску ширины 2 м, то площадь оставшегося прямоугольника будет на 14 м^2 меньше площади квадрата. Найдите периметр исходного квадрата.
ОТВЕТ: _____

№6. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в половине восьмого?
ОТВЕТ: _____

№7. Повысив квалификацию, рабочий снизил время выполнения работы на 20%. На сколько процентов возросла его производительность труда? ОТВЕТ: _____

№8. Как относятся площади правильного треугольника и квадрата одинакового периметра?
ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Найдите сумму всех чётных натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не кратных 5.
ОТВЕТ: _____

№10. Найдите сумму целых корней уравнения $\sqrt{x^2 + 9 - 6x} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$.
ОТВЕТ: _____

№11. Найдите все значения b , при которых вершина параболы $y = x^2 + bx + 7$ равноудалена от точек $O(0; 0), A(1; 1)$. ОТВЕТ: _____

№12. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удалён от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4. Найдите среднюю линию трапеции.

ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. На координатной плоскости даны две параболы $y = x^2 - 7x + a$ и $y = x^2 + 3x + b$, где a, b – некоторые числа. Расстояние между вершинами этих парабол равно 13. Найдите абсциссу точки пересечения этих парабол, если известно, что она положительная.
ОТВЕТ: _____

№14. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, N – точка пересечения диагоналей AC и BD . Известно, что $AD = DC, BN = 10, DN = 8$. Найдите AD .
ОТВЕТ: _____

№15. Имеется сплав, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 40% от суммарной массы меди и марганца, а масса меди составляет 60% от суммарной массы никеля и марганца. Каково отношение массы марганца к сумме масс никеля и меди?
ОТВЕТ: _____

№16. В треугольнике ABC середина стороны BC , центр вписанной окружности и точка касания вписанной окружности со стороной AB лежат на одной прямой. Найдите AB , если $BC = 36, AC = 34$.
ОТВЕТ: _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет $\frac{5}{8}$ скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найдите скорости всех поездов.
ОТВЕТ: _____

№18. На отрезке AB отмечена точка C так, что $AC = 5, BC = 3$. На отрезках AC, BC, AB как на диаметрах в одну и ту же полуплоскость относительно прямой AB построены полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей.
ОТВЕТ: _____

№19. Расставьте в клетках квадрата 3×3 действительные числа так, чтобы сумма любых двух соседних по горизонтали чисел была равна 8, а произведение любых двух соседних по вертикали чисел равно 9. Найдите все возможные значения, которые при такой расстановке может принимать число, стоящее в центральной клетке этой таблицы.
ОТВЕТ: _____

№20. Все вершины четырёхугольника $ABCD$ принадлежат параболы $y = x^2$. При этом диагонали AC, BD взаимно перпендикулярны, равны по длине и пересекаются в точке K с абсциссой 1. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что диагональ AC параллельна прямой $y = 2x$.
ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите наименьшее общее кратное чисел 156, 195, 3900 **ОТВЕТ:** _____

№2. Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, длина высота которой равна 10, а площадь диагонального сечения равна 12 **ОТВЕТ:** _____

№3. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отметили точку M . Найдите площадь четырехугольника $AMCD$, если $AM = 13, AB = 12, BD = 20$ **ОТВЕТ:** _____

№4. Во сколько раз A больше B , если $A = (0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}) \cdot 3, B = (1,5 + \frac{1}{4}) : 18\frac{1}{3}$?

ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии, у которой

$a_{13} - a_8 = 15, a_{14} = 22$ **ОТВЕТ:** _____

№6. Найдите число целых решений неравенства $\frac{1}{x^2-11x+28} \leq \frac{8x-37}{(x^2-8x+16)(x^2-9x+14)}$ **ОТВЕТ:** _____

№7. Вычислите $14ctg(arctg(-2) + arcctg4)$ **ОТВЕТ:** _____

№8. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка K так, что прямая AK делит пополам биссектрису BM . Найдите площадь треугольника, если $AB:BC = 1:3, S_{BOK} = 3, O$ – точка пересечения AK, BM **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Диагонали трапеции равны 26 и 30, а расстояние между серединами оснований равно 14. Найдите площадь трапеции **ОТВЕТ:** _____

№10. Найдите сумму двузначных чисел, каждое из которых после уменьшения на 1 будет в шесть раз больше суммы цифр в исходной записи **ОТВЕТ:** _____

№11. Найти среднее арифметическое корней (в градусах) уравнения

$\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$, лежащих на отрезке $[-270^\circ; 90^\circ]$ **ОТВЕТ:** _____

№12. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй – синих, причем число красных составляло $\frac{15}{19}$ от числа синих шаров. Когда из коробок удалили $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй – более 1000. Найдите, сколько было первоначально синих шаров **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Сумма чисел, обратных четырем последовательным числам натурального ряда, равна $\frac{19}{20}$.
Найдите эти числа **ОТВЕТ:** _____

№14. Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K , пересекает сторону CD в точке L . Площадь $AKLD$ в 5 раз больше площади $BKLC$, $CL = 3$, $DL = 15$, $KC = 4$. Найдите длину KD **ОТВЕТ:** _____

№15. Один из углов треугольника равен 45° , радиус вписанной в него окружности равен 1, а площадь треугольника равна $18 + \sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности **ОТВЕТ:** _____

№16. Из натуральных чисел составлены группы (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), ... так, что каждая оканчивается квадратом номера группы. Сумма членов 50-й группы равна... **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Решите уравнение $\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$. **ОТВЕТ:** _____

№18. Пусть $m; M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения, которые принимает выражение $x + 2y$ при условии, что $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 5$. Найдите число целых точек на отрезке $[m; M]$ **ОТВЕТ:** _____

№19. Каждая клетка таблицы 8×9 окрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зелёных клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зелёных клеток. Какое наибольшее и какое наименьшее число зелёных клеток может быть в такой таблице? **ОТВЕТ:** _____

№20. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки: M – середина стороны BC , N, K – основания высот AN, CK , H – точка пересечения высот. Биссектриса угла ACB пересекает отрезок AN в точке T . Оказалось, что $CT \parallel MN, TH = 10$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника NBK . **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите частное от деления НОК на НОД чисел 90, 135 и 150. **ОТВЕТ:** _____

№2. Сколько простых чисел лежит на отрезке $[0; 25]$? **ОТВЕТ:** _____

№3. Найдите длину высоты, проведённую к гипотенузе, если катеты прямоугольного треугольника относятся как 1:3, а гипотенуза равна 40. **ОТВЕТ:** _____

№4. Найдите сумму значений функции $y = 3x^5 - 20x^3 + 3$ в точках экстремума.

ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. При делении пятизначного числа $\overline{45n8m}$ на 5 в остатке получается 3. Найдите произведение цифр n и m , если известно, что исходное число делится на 18. **ОТВЕТ:** _____

№6. Найдите градусную меру угла между прямыми $y = 0,5x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 2$. **ОТВЕТ:** _____

№7. В окружность вписан правильный треугольник площадью $9\sqrt{3}$ и в этот треугольник вписана окружность. Найдите площадь полученного кольца. **ОТВЕТ:** _____

№8. Вычислите сумму $\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{57 \cdot 64}$. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Найдите значение выражения $x_1^4 + x_2^4$, где x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

ОТВЕТ: _____

№10. Найдите сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{5x^2+5}{x} - 4 = 0$.

ОТВЕТ: _____

№11. Медианы треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№12. Найдите значение выражения $\frac{8x^3-4x^2-2x+1}{16x^4-8x^2+1} + \frac{2x^3+x^2+2x}{2x+1}$, если $x = -\sqrt{21}$. **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист. Они встретились на расстоянии 4 км от B , а в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист находился на расстоянии 15 км от A . Найдите расстояние от A до B .

ОТВЕТ: _____

№14. Чему равно a^3 , если $a = \sqrt{4 \sqrt{3 \sqrt{4 \sqrt{3 \sqrt{4 \sqrt{3 \dots}}}}}}$? **ОТВЕТ:** _____

№15. Найдите сумму $\alpha + \beta$ (в градусах), если углы α и β таковы, что $\alpha + \beta \in (0; \pi)$, а их тангенсы $tg\alpha, tg\beta$ являются корнями уравнения $x^2 + 5\sqrt{3}x - 4 = 0$. **ОТВЕТ:** _____

№16. На боковом ребре AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ объёма 105 выбрана точка M так, что $AM:MS = 3:4$. Точки K, L лежат соответственно на рёбрах AB, AC основания и делят эти рёбра в отношении 1:2, считая от вершины A . Найдите объём пирамиды $AKLM$. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y \geq |x| - 2, \\ 3y + 4|x| \leq 15. \end{cases}$ **ОТВЕТ:** _____

№18. Два целых числа сложили, вычли из большего меньшее, перемножили, разделили большее на меньшее и полученные результаты сложили, получили число 243. Найдите первоначальные числа. **ОТВЕТ:** _____

№19. Основания равнобедренной трапеции 1 и 8. Найдите радиус окружности, которая проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, касается оснований и боковых сторон трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№20. Решите уравнение $(1 + x + x^2)^2 = \frac{10\sqrt{2}+1}{10\sqrt{2}-1} \cdot (1 + x^2 + x^4)$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									