

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Укажите количество простых чисел, принадлежащих промежутку $[1; 19]$. **ОТВЕТ:** _____

№2. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - 3,5 - 5x^2$. **ОТВЕТ:** _____

№3. Дана функция $y = \frac{x}{2} + 2$. Чему равна площадь треугольника, который образуется графиком этой функции и осями координат? **ОТВЕТ:** _____

№4. В треугольнике ABC $\angle A = 65^\circ$, $\angle C = 55^\circ$. Высоты треугольника пересекаются в точке O . Найдите величину угла AOC . **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Число 17 надо было умножить на двузначное число, но по ошибке ученик не заметил знака умножения и посчитал, что уже получил ответ. На самом деле истинное произведение на 420 меньше полученного четырёхзначного числа. Найдите двузначное число. **ОТВЕТ:** _____

№6. Две медианы равнобедренного треугольника взаимно перпендикулярны. Боковая сторона равна $\sqrt{10}$. Найдите площадь треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№7. Пусть $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 2$. Найдите $x_1^4 + x_2^4$ **ОТВЕТ:** _____

№8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - xy - y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Четыре числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 112, сумма средних чисел равна 48. Найдите сумму большего и меньшего из этих чисел. **ОТВЕТ:** _____

№10. Найдите значение выражения $A = \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+8x+12} + \frac{1}{x^2+16x+60}$ при $x = \sqrt{39} - 4$. **ОТВЕТ:** _____

№11. Параболы $y = -5(x - 3)^2 + 4$ и $y = ax^2 + bx + c$ симметричны относительно прямой, проходящей через их общую вершину параллельно оси абсцисс. Найдите сумму коэффициентов a, b, c **ОТВЕТ:** _____

№12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CK . Площади треугольников BEK, ABC равны $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$ соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BEK , если $AC = 3\sqrt{2}$ **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Около окружности, радиус которой равен 10, описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно 12. Найдите длину боковой стороны трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите разность между суммой корней уравнения и их произведением $\frac{(x+1)^2 \cdot x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{12}{49}$.

ОТВЕТ: _____

№15. Вершины B и C при основании равнобедренного треугольника ABC соединены с серединой M его высоты, проведённой из вершины A . Эти прямые пересекают боковые стороны AC, AB треугольника в точках D, E соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $AEMD$, если площадь треугольника ABC равна 186 **ОТВЕТ:** _____

№16. От пристани A до пристани B вниз по течению катер проходит за 8 ч, а от пристани B до пристани A против течения – за 12 часов. Найдите время, за которое плот (не имеет собственной скорости) проплывёт от пристани A до пристани B . **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. В результате реконструкции цеха число высвободившихся рабочих заключено в пределах от 1,7 до 2,3% от общего числа рабочих в цехе. Найдите минимальное число рабочих, которые могли быть заняты в цехе до реконструкции. **ОТВЕТ:** _____

№18. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8. На гипотенузе треугольнике вне треугольника построен квадрат, одна из сторон которого совпадает с гипотенузой. Вычислите расстояние от вершины прямого угла до точки пересечения диагоналей квадрата. **ОТВЕТ:** _____

№19. Решите уравнение $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 999 существует таких чисел n , что сумма цифр в их десятичной записи равна наибольшему общему делителю чисел n и $n + 6$? **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

І уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Вычислите $\frac{9}{5-\sqrt{7}} + \frac{22}{7+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. ОТВЕТ: _____

№2. Альбом стоил 18 рублей. После подорожания он стал стоить 23 рубля 40 копеек. На сколько процентов подорожал альбом? ОТВЕТ: _____

№3. Найдите площадь треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16. ОТВЕТ: _____

№4. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(x^2+6x+5)(x-6)^2}{1-x^2} \geq 0$ ОТВЕТ: _____

ІІ уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите модуль разности наибольшего и наименьшего корней уравнения

$(2x^2 - 5x - 1)^2 = (7x - 11)^2$. ОТВЕТ: _____

№6. На соревнованиях по стрельбе за попадание в цель начисляется 5 очков, а за промах – снимается 3 очка. Определите, какое наименьшее количество раз необходимо попасть в цель с 10 попыток, чтобы набрать не менее 21 очка. ОТВЕТ: _____

№7. Поезд прошёл с постоянной скоростью мимо всей платформы длиной 360 м за 24 с, а мимо наблюдателя, стоящего на платформе, - за 8 с. Найдите скорость поезда (в м/с). ОТВЕТ: _____

№8. Найдите сумму двух натуральных чисел, разность которых равна 66, а НОК равно 360. ОТВЕТ: _____

ІІІ уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M , а на стороне AC – точка K так, что $AM:MB = 2:1$, $AK:KC = 1:3$ и треугольник AMK – равносторонний. Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 21$. ОТВЕТ: _____

№10. В равнобедренную трапецию, площадь которой равна $45\frac{1}{8}$, вписана окружность. Сумма двух углов трапеции равна 60° . Найдите периметр трапеции. ОТВЕТ: _____

№11. В сплаве олова и меди содержалось 11 кг меди. После того как добавили 7,5 кг олова, содержание олова повысилось на 33%. Найдите первоначальную массу сплава. ОТВЕТ: _____

№12. Найдите $b + c$, если точка $A(1; -2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$. ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 3, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 24. Найдите одиннадцатый член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны. **ОТВЕТ:** _____

№14. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 и 11. Найдите периметр треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№15.
$$\begin{cases} (x + y + 1)^2 + (x + y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$
 Решите систему уравнений. **ОТВЕТ:** _____

№16. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3, при делении на 6 дают в остатке 5 и при делении на 9 дают в остатке 2. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Из пунктов A и B , находящихся друг от друга на расстоянии $\sqrt{43}$ м, равномерно и прямолинейно движутся в пункт C две точки. Скорость первой точки равна 1 м/с, скорость второй точки равна 0,5 м/с. Найдите сумму расстояний AC и BC в метрах, если известно, что первая точка прибыла в пункт C на 5 секунд раньше второй и угол ACB равен 60° . **ОТВЕТ:** _____

№18. Андрей написал программу для компьютера: если на экране появляется число a , $a \neq -1$, то после нажатия клавиши *Enter* на экране появляется число $\frac{a-1}{a+1}$, если же на экране появляется число $a = -1$, то компьютер выводит на экран сообщение об ошибке. Андрей вывел на экран некоторое число A и последовательно нажал клавишу *Enter* 2025 раз, в результате чего на экране появилось число 1000. Чему равно число A ? **ОТВЕТ:** _____

№19. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) на гипотенузе AB отмечены точки K, L так, что $AK = KL = LB$. Найдите длину гипотенузы, если $CK^2 + CL^2 = 5$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Решите уравнение $\frac{54}{x^4 - 24x^2 + 150} = x^2 + 4\sqrt{3}x + 21$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите сумму всех натуральных решений неравенства $(7 - x) \cdot (x + 8)^3 \cdot (x - 19)^2 \geq 0$.
ОТВЕТ: _____

№2. Длины диагоналей ромба являются корнями уравнения $0,1x^2 - 3,2x + 9,6 = 0$. Найдите площадь ромба. ОТВЕТ: _____

№3. Найдите значение выражения $(\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{6}{\sqrt{3}-1}) \cdot (2\sqrt{3} - 1)$. ОТВЕТ: _____

№4. Сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%? ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. График функции, заданной формулой $y = kx + b$, симметричен относительно начала координат и проходит через точку $A(4; 12)$. Найдите значение выражения $k + b$. ОТВЕТ: _____

№6. Длины двух сторон треугольника равны 5 и 6, а его площадь равна $3\sqrt{21}$. Найдите наибольшее значение, которое может принимать длина третьей стороны треугольника. ОТВЕТ: _____

№7. Найдите сумму всех натуральных чисел n , при которых выполняется равенство $\text{НОК}(n; 52) = 52$.
ОТВЕТ: _____

№8. В равнобедренном треугольнике две стороны равны 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании треугольника. ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Конфеты в коробки упаковываются рядами, причём количество конфет в каждом ряду на 4 больше, чем количество рядов. Дизайн коробки изменили, при этом добавили 3 ряда, а в каждом ряду добавили по 1 конфете. В результате количество конфет в коробке увеличилось на 39. Сколько конфет упаковывалось в коробку первоначально? ОТВЕТ: _____

№10. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка пересечения её диагоналей делит диагональ AC на отрезки длиной 4 и 1. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь треугольника ABC равна 15. ОТВЕТ: _____

№11. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не кратных семи. ОТВЕТ: _____

№12. Найдите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π . ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Найдите произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$|12 - x - x^2| + 2 < 2 \cdot |3 - x| + |x + 4|$. ОТВЕТ: _____

№14. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 2, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 4. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны. ОТВЕТ: _____

№15. Решите уравнение $\frac{30x^2}{x^4+25} = x^2 + 2\sqrt{5}x + 8$. ОТВЕТ: _____

№16. Двое рабочих различной квалификации выполнили некоторую работу, причём первый проработал 7 часов, прежде чем к нему присоединился второй. Если бы сначала второй рабочий работал 7 часов, а затем к нему присоединился первый, то работа была бы закончена на 84 минуты позже. Известно, что первый рабочий четвертую часть работы выполняет на 3 часа быстрее. Чем второй выполняет третью часть работы. Сколько минут заняло выполнение всей работы?

ОТВЕТ: _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. От пристани B отплывает плот и одновременно против течения реки отходит катер. Доплыв до пристани A , находящейся на расстоянии s_1 от пристани B , катер разворачивается и плывёт к пристани C , находящейся на расстоянии s_2 вниз по течению реки от пристани B . Найдите наибольшее возможное значение скорости катера (в км/ч) в стоячей воде, при движении с которой он прибудет к пристани C не раньше, чем плот, если скорость течения реки равна 6 км/ч, а $s_1 : s_2 = 7 : 4$.

ОТВЕТ: _____

№18. Центры трёх попарно касающихся окружностей совпадают с вершинами треугольника со сторонами 5, 6 и 7. При этом две окружности касаются внешним образом и находятся внутри третьей окружности. Найдите радиус третьей окружности. ОТВЕТ: _____

№19. У Васи в кармане лежит 100 одинаковых по форме карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100 (каждое число ровно на одной карточке). Вася вынимает наугад часть карточек и смотрит, какие числа на них написаны. Какое наименьшее число карточек должен вынуть Вася, чтобы среди записанных на них чисел заведомо нашлось пять, сумма которых делится на 3? ОТВЕТ: _____

№20. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $x^2 - 3xy + 2y^2 - x = 0$. ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите произведение действительных корней уравнения $(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x - 1) = 2$.
ОТВЕТ: _____

№2. Найдите радиус окружности с центром $A(2; 3)$ и проходящую через точку $B(-2; 6)$. ОТВЕТ: _____

№3. Две стороны тупоугольного треугольника равны $\sqrt{17}$ и 5, а высота, проведённая к третьей стороне, равна 4. Найдите площадь этого треугольника. ОТВЕТ: _____

№4. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью 84 км/ч, а вторую – со скоростью 63 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути. ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Если от квадрата отрезать параллельно его стороне полоску ширины 2, то площадь оставшегося прямоугольника будет на 14 меньше площади квадрата. Найдите периметр исходного квадрата.
ОТВЕТ: _____

№6. Найдите сумму первых семи членов арифметической прогрессии, четвёртый член которой равен 5. ОТВЕТ: _____

№7. В окружности радиуса 5 проведена хорда. Сумма её длины и расстояния от центра окружности до этой хорды равно 11. Найдите длину хорды. ОТВЕТ: _____

№8. Коля и Толя в течение недели (7 дней) собирали орехи. В понедельник они собрали поровну орехов. В каждый последующий день недели Коля собирал на 40 орехов больше, чем в предыдущий, а Толя в два раза больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что общее число орехов, собранных каждым из ребят, одно и то же. Сколько орехов собрал каждый из ребят в понедельник?
ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Найдите значение выражения $\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} \cdot \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$ при $x = 0,075$ и $y = 16\frac{2}{3}$.

ОТВЕТ: _____

№10. Решите уравнение $||x^2 - 2x| - 3| = 3 - x$. ОТВЕТ: _____

№11. Найдите количество натуральных чисел n , при которых число $\frac{3n+10}{2n-5}$ также является натуральным. ОТВЕТ: _____

№12. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удалён от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции. ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Однажды Петя стрелял в тире, в котором действовало следующее правило: за каждое попадание в мишень стрелок получал два дополнительных бесплатных патрона, а за каждый промах у него отбирался один патрон (если, конечно, после промаха у него оставались патроны). Сколько раз Петя попал в мишень, если к концу стрельбы выяснилось, что число попаданий равно числу оплаченных им патронов, а выстрелить ему удалось 20 раз? **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведённые к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. **ОТВЕТ:** _____

№15. Найдите все натуральные числа m , при которых уравнение $x^2 - 5mx + 84 = 0$ имеет целые корни. **ОТВЕТ:** _____

№16. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из её третьего члена вычесть 4, то эти числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите три исходных числа. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Два пешехода движутся в один и тот же пункт по прямолинейным дорогам каждый со своей постоянной скоростью. В начальный момент времени положения пешеходов и пункта, в который они движутся, образуют равносторонний треугольник. После того, как первый пешеход прошёл 8 км, указанный треугольник стал прямоугольным. В момент прибытия второго пешехода в пункт назначения первому остаётся пройти ещё 12 км. Определите расстояние между пешеходами в начальный момент времени. **ОТВЕТ:** _____

№18. Среди поступающих в Лицей был проведён опрос. На вопрос: «Какой предмет вы любите больше – математику или физику?» большая часть опрошенных ответила, что математику, меньшая – что физику. Далее оказалось, что среди любителей физики 85% предпочитают задачи по термодинамике, а остальные 15% - по механике. Среди любителей математики 56,25% любят задачи по алгебре, 37,5% - по геометрии, а оставшиеся два человека – задачи по тригонометрии. Сколько поступающих в Лицей было опрошено? **ОТВЕТ:** _____

№19. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, M так, что AK, DM – биссектрисы углов A, D , причём $BM = MK = KC$. Известно также, что $AB = 12, DK = 6\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма. **ОТВЕТ:** _____

№20. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству $x^3 + y^3 = 27 - 9xy$. Найдите все возможные значения суммы $x + y$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									