

**А.В. МАКЕЙКИН**

Республика Беларусь, Витебск, Лицей ВГУ имени П.М. Машерова

**МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ КАК НЕОБХОДИМЫЙ  
ИНСТРУМЕНТ УЧАЩЕГОСЯ – УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**Введение.** Одной из целей олимпиадного движения по учебным предметам, например, по физике, является – создание условий для интеллектуального развития и профессиональной ориентации одаренных учащихся. Опыт участия автора в различных этапах Республиканской олимпиады по физике (районный, областной этапы), а также опыт работы моего научного руководителя в качестве члена жюри областного, республиканского этапов, а также, в качестве преподавателя при проведении сборов команды Витебской области при подготовке к республиканскому этапу олимпиады по физике, показывает, что при прохождении участником олимпиады экспериментального

тура, необходимы знания, умения и навыки по использованию различных математических способов обработки результатов физических измерений. По критериям оценивания результатов выполнения участниками олимпиады заданий экспериментального тура, наиболее высокие баллы выставляются жюри при условии использования, например, метода наименьших квадратов. Однако, содержание математического аппарата, лежащего в основе этого метода выходит далеко за пределы школьной программы по математике. Его изучение требует при подготовке к олимпиаде значительных временных и интеллектуальных усилий со стороны учащегося – участника олимпиады.

Поэтому в настоящей работе была поставлена цель – разработать алгоритм изучения и выработки практических навыков применения метода наименьших квадратов учащимися десятыми – одиннадцатыми классами, не имеющими достаточной математической подготовки на базовом уровне.

В качестве материалов для исследования использовалась учебно-методическая литература по методу наименьших квадратов [1]; учебно-методическая литература и учебное оборудование для проведения лабораторной работы «Изучение зависимости сопротивления металлов от температуры»; программа MS Excel. Настоящая работа является продолжением исследований, проведенных нами ранее [2]. Методы исследования – аналитические, экспериментальные, численные.

**Основная часть.** Одной из главных задач обработки результатов измерений физических величин на различных этапах Республиканской олимпиады по физике, полученных в результате эксперимента, является нахождение их аналитической зависимости. Если результаты совместных измерений имеют линейную зависимость, то одним из мощных методов нахождения такой зависимости является метод наименьших квадратов. В частности, на основании этого метода можно провести линейную аппроксимацию экспериментальных результатов с использованием различных компьютерных приложений.

На первом этапе учащемуся необходимо изучить теоретические основы метода наименьших квадратов. Формулы для линейной аппроксимации, используемые в этом методе, получаются с использованием математического аппарата частных производных. Однако, учащиеся 10 классов не обладают необходимыми знаниями и умениями использования даже производной функции одного аргумента. Поэтому, на начальном этапе необходимо изучение производных функции одного аргумента и их применения для исследования функции на экстремум.

После освоения учебного материала по производным функции одного аргумента учащемуся необходимо ознакомиться с понятиями о функции многих аргументов и, соответственно, с понятием частной производной.

Только после изучения и освоения данного учебного материала мы и могли приступить к изучению непосредственно самого метода наименьших квадратов.

Как мы сказали ранее метод наименьших квадратов позволяет получить достоверные оценки параметров линейного уравнения: коэффициента наклона  $k$  и сдвига относительно начала координат  $b$ , а также оценить их погрешности. Основная идея в том, что через одну и ту же совокупность точек, полученных в результате экспериментальных данных, можно провести различные прямые, причем часть точек на эту прямую не попадает. Следовательно, задача заключается в нахождении такой прямой, для которой все не попавшие на нее точки находятся на минимальном расстоянии от графика (это абсолютные погрешности измерений). Так как точки будут располагаться по обе стороны от проведенной прямой, то погрешности будут и положительными и отрицательными, и для нахождения их совокупного влияния каждую из них необходимо возвести в квадрат (чтобы избежать компенсации при сложении) и затем сложить, полученная сумма должна быть минимальной:

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min .$$

Дальше по признаку экстремума частные производной должны равняться нулю:

$$\begin{cases} S'_a(k, b) = \sum_{i=1}^n 2(kx_i + b - y_i)x_i = 0, \\ S'_b(k, b) = \sum_{i=1}^n 2(kx_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

После дальнейших преобразований получим решение системы двух уравнений (коэффициенты линейного уравнения):

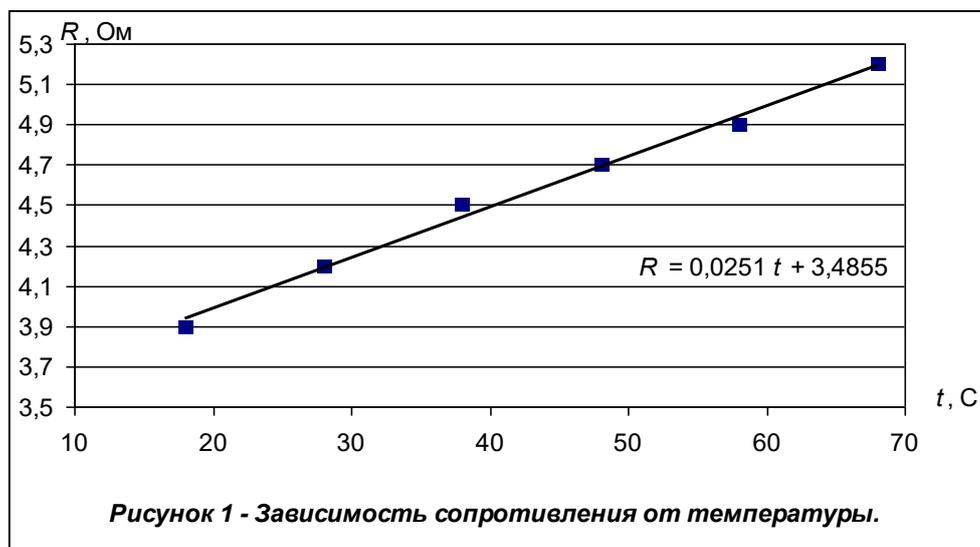
$$k = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2},$$

$$b = \sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i.$$

Эти формулы пригодятся на втором этапе при обработке данных, полученных в ходе эксперимента.

На втором этапе, нам было необходимо выработать практические навыки использования этого метода на примере обработки реальных экспериментальных данных.

Для обработки экспериментальных данных с использованием метода наименьших квадратов нам было необходимо использовать экспериментальные данные, полученные в результате измерения некоторой линейной зависимости физических величин. Для их получения было проведено исследование зависимости сопротивления металлической проволоки от температуры с использованием лабораторной установки, применяемой на кафедре инженерной физики в учебном процессе. В данной работе вольфрамовая нить помещается в стеклянный сосуд, который помещается в металлический сосуд, заполненный водой, и нагреваемый на электрической плитке. Сопротивление вольфрамовой проволоки измерялось с помощью универсального мультиметра. Температура изменялась в пределах от 18°C до 68°C с шагом 10°C. Полученные результаты представлены на графике зависимости сопротивления металла от температуры (Рисунок 1).



Жирными маркерами на рисунке обозначены точки, соответствующие экспериментальным результатам. Теоретически известно, что данная зависимость должна иметь линейный вид, что и наблюдается по графику.

Для дальнейшей проверки собственных расчетов с использованием метода наименьших квадратов, также была проведена линейная аппроксимация и построена линия тренда с помощью внутреннего инструмента программы MS Excel. На рисунке приведен явный вид аналитической зависимости сопротивления металла от температуры, приводимый программой

$$R = 0,0251 t + 3,4855.$$

В дальнейшем, были проведены собственные вычисления характеристик линейной зависимости с использованием метода наименьших квадратов:

углового коэффициента по формуле

$$k = \frac{\langle tR \rangle - \langle t \rangle \langle R \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2};$$

свободного коэффициента по формуле

$$b = \langle R \rangle - k \langle t \rangle.$$

Численные значения коэффициентов:

$$k = 0,025143 \frac{\text{Ом}}{^\circ\text{C}}; b = 3,385524 \text{ Ом}$$

с высокой степенью точности совпадают с коэффициентами аналитической зависимости, полученной с использованием программы *MS Excel* и подтверждают тот факт, что аппроксимация линейной зависимости в программе *MS Excel* как раз и проводится с использованием метода наименьших квадратов.

Теоретическая зависимость сопротивления металлов от температуры линейна и описывается выражением

$$R = R_0(1 + \alpha t) = R_0 + R_0 \alpha t,$$

Где  $R_0$  – сопротивление металла при  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления металла. Сравнивая эту теоретическую зависимость с полученными нами значениями углового и свободного коэффициентов с использованием метода наименьших квадратов, можно сделать вывод, что значение свободного коэффициента  $b$  – это и есть значение  $R_0$ , а значение углового коэффициента  $k$  совпадает с произведением  $R_0 \alpha$ . Т.е.,  $k = R_0 \alpha$ . Откуда можно вычислить значение температурного коэффициента сопротивления металла

$$\alpha = \frac{k}{R_0} = 0,0072 \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

**Заключение.** Таким образом, в результате проведенной работы был изучен и практически освоен метод наименьших квадратов, используемый для обработки экспериментальных результатов совместных физических измерений при их линейной зависимости.

Проведенные собственные измерения зависимости сопротивления металла от температуры и их обработка с использованием метода наименьших квадратов позволили нам определить такие параметры металла, как его сопротивление при нуле градусов Цельсия и температурный коэффициент сопротивления металла.

Полученные знания, умения и навыки могут быть использованы в дальнейшем при проведении различных физических экспериментов, в частности, при обработке результатов экспериментального тура олимпиады по физике. Отработанный в результате освоения метода наименьших квадратов алгоритм изучения этого метода позволяет даже учащемуся десятых классов успешно им овладеть на уровне практического использования.

Список цитированных источников:

1. Светозаров, В.В. Основы статистической обработки результатов измерений: учеб. пособие / В.В. Светозаров. – М.: Изд. МИФИ, 2005. – 40 с.

2. Макейкин, А.В. Использование метода наименьших квадратов для обработки результатов физических измерений / А.В. Макейкин // Эврика : материалы XIII Научно-практической конференции учащихся учреждений общего среднего образования Витебской области, Витебск, 12 ноября 2022 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – С.240-242.