Е.А. ЛЕВОШКИН
Научный руководитель – М.М. Чернявский
Республика Беларусь, Витебск, Лицей ВГУ имени П.М. Машерова

МЕТОД АНАЛИЗА КОРНЕЙ ТРЕХЧЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

В наше время во многих задачах разных сферах деятельности, так или иначе связанных с точными науками, требуется решение различных уравнений, в первую очередь, алгебраических. И если обычные линейные или квадратные алгебраические уравнения сложностей не вызывают, то нахождение корней алгебраического уравнения третьей и более высоких степеней может вызывать значительные трудности. Известным фактом является то, что для уравнения пятой степени и выше в общем случае отсутствует формулы выражения корней через конечную комбинацию радикалов от коэффициентов (теорема Абеля). При этом, при решении конкретных прикладных задач далеко не всегда необходимо точное значение корней, выраженных через громоздкую комбинацию радикалов. Часто достаточно знать число действительных корней и иметь представления о их локализации.

Несмотря на то, что практически все уравнения в настоящее время решаются приближенно с помощью компьютера численными методами, актуально получение пусть и приближенных, но аналитических алгоритмов выражения корней алгебраических уравнений через коэффициенты. То есть требуются конкретные конечные формулы, достаточно просто выражающие корни через коэффициенты.

Проанализировав различные типы алгебраических уравнений, возникающих в приложениях точных наук, был сделан вывод, что достаточно распространенным видом уравнений является трехчленные уравнения, т. е. уравнения вида:

$$x^n + px^m + q = 0 \qquad (n > m > 0, p \neq 0, q \neq 0).$$

Уравнения такого вида возникают в задачах самой различной направленности. Например, в аэродинамике при анализе устойчивости движения самолета; в задаче о равновесии тонкой панели, обтекаемой потоком воздуха; при определении температуры для работы летательного аппарата [1–3]; в задачах финансовой математики при определении величины процентной ставки [4, 5] и многих других. И в этих задачах важным является определение числа действительных корней уравнения и их локализация по коэффициентам *p* и *q*. Также известно, что к трехчленному виду можно привести любое алгебраическое уравнение четвертой и пятой степеней.

Таким образом, в настоящей работе поставлена **цель** – предложить эффективный способ для анализа действительных корней трехчленных алгебраических уравнений.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи:**

– определение сфер деятельности, в которых возникают исследуемые уравнения;

– анализ существующих работ, касающихся трехчленных уравнений;

– адаптация одного из алгоритмов анализа корней уравнения третьей степени на аналогичный случай уравнения пятой степени;

– проверка эффективности метода на конкретных примерах.

Основная часть. Самым известным примером трехчленных уравнений является квадратное уравнение вида:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

Уравнения такого вида и сводящиеся к нему изучаются в школе, в их решении нет ничего сложного. Сложности могут вызывать уравнения более высоких степеней, например, уравнение пятой степени в форме Бринга:

$$x^5 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Напомним, что произвольное алгебраическое уравнение пятой степени всегда можно привести к этому виду.

Для данного уравнения осуществляем подстановку $x = kq / p$, где $k \neq 0$. После подстановки получим:

$$k^5 \frac{q^5}{p^5} + kq + q = 0.$$

Это позволяет нам выразить функцию $k = k(p, q)$ в виде неявной зависимости через коэффициенты уравнения (1): $\frac{k^5}{k+1} = -\frac{p^5}{q^4}$.

Таким образом, количество действительных корней уравнения (1) и их локализация зависят от поведения функции $f(k) = \frac{k^5}{k+1}$, график которой представлен на рисунке 1.

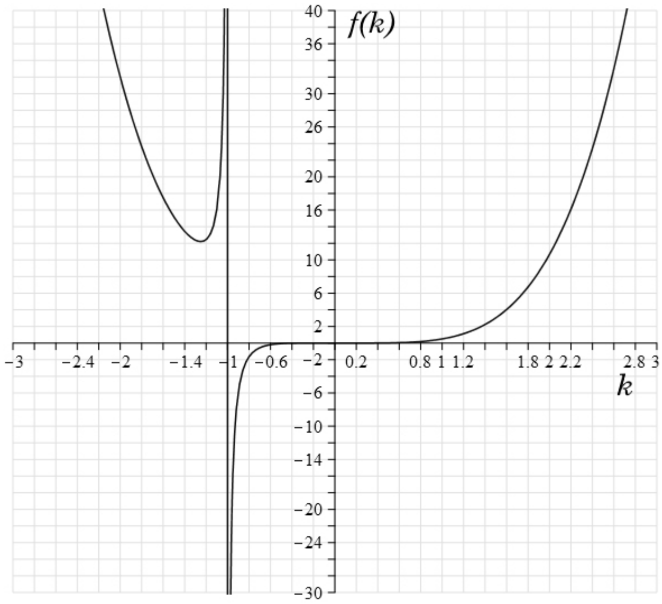

Рисунок 1 – График функции $\boldsymbol{f(k) = \frac{k^5}{k+1}}$

Производная этой функции имеет следующий вид:

$$f'(k) = \frac{k^4(4k+5)}{(k+1)^2}.$$

Из этой формулы можем найти значение k, при котором достигается локальный минимум $k_* = -\frac{5}{4}$. Значение $f(k_*) = \frac{3125}{256}$. Линия $k = -1$ на графике является вертикальной асимптотой и не является решением уравнения.

И теперь мы можем сформулировать зависимость количества корней уравнения (1) от значений p и q.

– *если выполнено* $-\frac{p^5}{q^4} > \frac{3125}{256}$ *, то уравнение* (1) *имеет 3 различных действительных корня;*

– *если* $-\dfrac{p^5}{q^4}=\dfrac{3125}{256}$, *то уравнение* (1) *имеет корень* x_* *кратности два, равный* $x_*=\left(-\dfrac{p}{5}\right)^{1/4}$, *и один простой корень;*

– *если справедливо выражение* $-\dfrac{p^5}{q^4}<\dfrac{3125}{256}$, *то уравнение* (1) *имеет всего один действительный корень.*

Данных условий уже достаточно для быстрого решения некоторых задач.

Для получения приближенных формул для вычисления действительных корней уравнения (1) мы можем разложить функцию $k(t)$, где $\dfrac{k^5(t)}{k(t)+1}=t$, в ряд Тейлора, взяв в качестве начальной точки точку в окрестности значения $-p^5/q^4$. Например, при $t=1/2$ получаем $k(1/2)=1$.

Приведем выражение отрезка ряда при таких начальных значениях

$$k(t)\approx\frac{7}{9}+\frac{4}{9}t+\frac{248}{729}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23696}{59049}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Рассмотрим пример использования его для приближенного вычисления корня уравнения

$$x^5-2{,}1x+3=0.$$

Для данного уравнения t = $-p^5/q^4$ = 0,5042100000. Подставляя это значение в выражение для отрезка ряда Тейлора, получаем k = 1,001877171 и, учитывая подстановку $x=kq/p$, находим значение корня x = −1,4312531019. Подставив это значение в уравнение $x^5-2{,}1x+3=0$, получим значение −0,000325295.

Теперь рассмотрим другое уравнение пятой степени с действительными коэффициентами

$$x^5+px^2+q=0\quad(p\neq 0, q\neq 0). \tag{2}$$

Для этого уравнения отдельно надо рассмотреть два подслучая:

1) p, q – одного знака;

2) p, q – разных знаков.

Если p и q одного знака, то применяется подстановка $x=k(q/p)^{1/2}$ $(k\neq 0)$, которая приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{5/2},$$

что влечет наличие одного действительного корня при любых допустимых значениях p и q.

Если p и q имеют разные знаки, то подстановка $x=k(-q/p)^{1/2}$ $(k\neq 0)$ приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2-1}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^5}{k^2-1}\right)' = \frac{k^4\left(3k^2-5\right)}{\left(k-1\right)^2\left(k+1\right)^2},$$

то точками, в которых достигаются локальные экстремумы функции $\dfrac{k^5}{k^2-1}$, являются точки $k_1=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $k_2=-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. При этом,

$$\frac{k_1^5}{k_1^2-1}=\frac{25\sqrt{15}}{18} \quad \frac{k_2^5}{k_2^2-1}=-\frac{25\sqrt{15}}{18}.$$

На рисунке 2 изображен график функции $f\left(k\right) = \dfrac{k^5}{k^2-1}$. Таким образом, получаем следующую зависимость.

– Если выполнено неравенство

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} > \frac{25\sqrt{15}}{18} \text{ или } q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < -\frac{25\sqrt{15}}{18}$$

то уравнение (2) *имеет три действительных решения;*

– при выполнении одного из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = \frac{25\sqrt{15}}{18}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$$

уравнение (2) *имеет кратный действительный корень кратности два и один простой действительный корень;*

– если выполнено неравенство

$$-\frac{25\sqrt{15}}{18} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < \frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (2) *имеет ровно один действительный корень.*

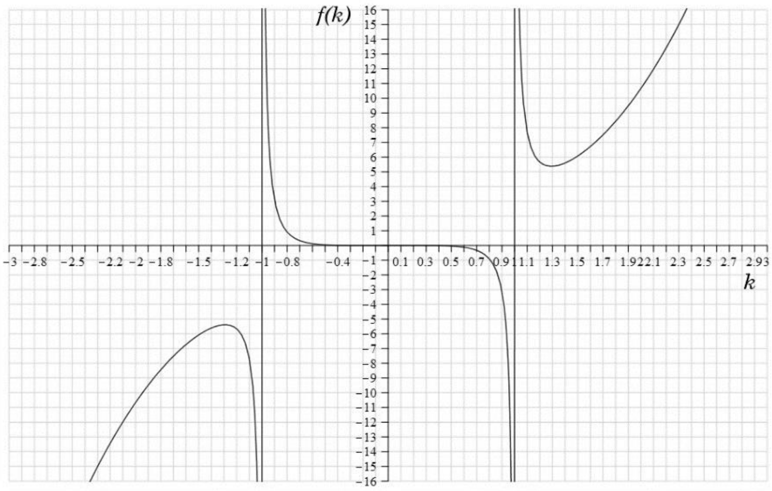

Рисунок 2 – График функции $\boldsymbol{f\left(k\right) = \dfrac{k^5}{k^2-1}}$

Для других уравнений $x^n + px^m + q = 0 \qquad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq\ 0)$ будет использоваться другая подстановка $x = k\left(q / p\right)^{1/m}$ или $x = k\left(-q / p\right)^{1/m}$, однако алгоритм решения и анализа корней остается прежним.

Заключение. Таким образом, на примере уравнения пятой степени исследован универсальный метод для определения числа действительных корней трехчленных уравнений. Применение этого метода позволяет получать сведения о расположении действительных корней, а также приближенные формулы для их вычисления.

Список цитированных источников:

1. Кравченко, В.Ф. Аналитический метод решения трехчленных алгебраических уравнений с помощью элементарных функций K_{ml} / В.Ф. Кравченко // Ученые записки ЦАГИ. – 1988. – Т. 19, № 4. – С. 135–144.
2. Кутищев, Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени / Г.П. Кутищев. – М.: ЛКИ, 2019. – 232 с.
3. Belkic, D. All the trinomial roots, their powers and logarithms from the Lambert series, Bell polynomials and Fox – Wright function: illustration for genome multiplicity in survival of irradiated cells / D Belkic // Journal of Mathematical Chemistry. – 2019. – Vol. 57. – P. 59–106.
4. Botta, V. On the behavior of roots of trinomial equations / V. Botta, J.V. da Silva // Acta Mathematica Hungarica. – 2019. – Vol. 157, № 1. – P. 54–62.
5. Botta, V. Roots of Some Trinomial Equations / V. Botta // Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 5, № 1. – P. 1–5.