НЕРАВЕНСТВА. ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ

Чукмарёв Р.Р., Лясович В.А.
ГУО «Лицей ВГУ имени П.М. Машерова»
Руководитель: Щеглова Н.В., учитель математики

Введение. При сдаче вступительных испытаний по математике в лицей нам было предложено следующее задание:

Найдите все тройки целых чисел a, b и c, при которых выполняется неравенство

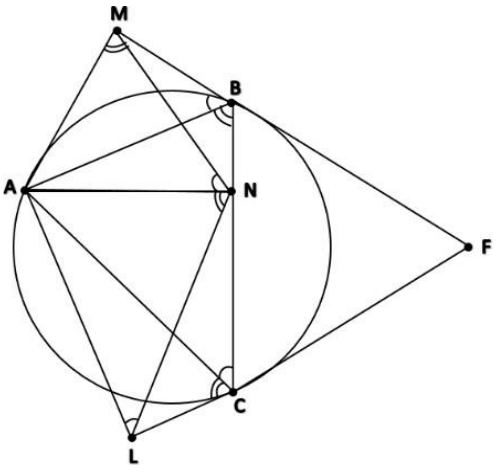
$$\sqrt{3a-5b+2c-2}+\sqrt{2b+4c-5a+1}+\sqrt{2a+3b-6c+2}>a^2-9a+20.$$

Очевидно, что знаний школьной программы нам не хватило, чтобы справиться с предложенным заданием. В дальнейшем, анализируя баллы, которые получили будущие лицеисты за выполнение предложенного задания, мы увидели, что из десяти возможных баллов только один человек получил четыре, остальные – либо не приступали к выполнению задачи (таких 82% от числа поступающих), либо получили от одного до трёх баллов. Мы стали искать возможные способы решения данной задачи. Использование неравенства о средних позволило найти оптимальное решение, то есть справиться с заданием за наименьший промежуток времени. Но если понятие среднего арифметического и среднего геометрического – это знакомый материал, то наше решение основывалось на использовании соотношения между средним арифметическим и средним квадратическим.

Изучив литературу по указанной теме, мы пришли к выводу: круг задач, которые можно решить с помощью неравенств, настолько широк, что охватывает не только алгебраический компонент (решение и доказательство неравенств, решение уравнений, текстовых задач), но и геометрический (задачи на координатной плоскости, задачи на плоскости, задачи в пространстве).

Материал и методы. Для изучения указанной темы мы ознакомились со специальной литературой, проанализировали задания, которые предлагались не только на III и IV этапах республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» в 2003 – 2021 годах, но и при отборе для участия в олимпиадах более высокого уровня (международная математическая олимпиада, Жаутыковская олимпиада и другие).

Результаты и их обсуждения. Впервые с простейшими неравенствами учащиеся школ сталкиваются при изучении взаимно обратных дробей в шестом классе. И косвенно изучают неравенство $a+\frac{1}{a}\geq 2$ $(a>0)$. С помощью этого неравенства можно было решить геометрическую задачу 10.6 на заключительном этапе республиканской олимпиады в 2019 году.



Условие. Через вершины B и C остроугольного треугольника ABC проведены касательные к его описанной окружности. Эти касательные пересекаются в точке F . Из вершины A опущены перпендикуляры AM, AL и AN на прямые FB, FC и BC соответственно.

Докажите неравенство $AM+AL\geq 2AN$

Решение. $\Delta AMN \sim \Delta ANL$.

Из подобия следует, что $\frac{AM}{AN}=\frac{AN}{AL}$.

Тогда $\frac{AM}{AN}+\frac{AL}{AN}=\frac{AM}{AN}+\frac{AN}{AM}\geq 2$, что равносильно требуемому неравенству.

Знание неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим для двух чисел пригодилось бы для решения задачи 9.5 на заключительном этапе республиканской олимпиады в 2015 году.

Условие. a, b, c, d – действительные положительные числа, такие, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$. Докажите, что

$$\frac{a+b}{a^2+b^2-ab}+\frac{b+c}{b^2+c^2-bc}+\frac{c+d}{c^2+d^2-cd}+\frac{d+a}{d^2+a^2-da}\leq 2$$

Решение. $\frac{x+y}{x^2+y^2-xy}\leq\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

LHS$\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}=2$.

Неравенство о средних $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\leq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\leq\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$ помогло справиться с заданием вступительного испытания.

Углубляясь в изучение неравенства о средних, мы изучили еще одно важное неравенство, это неравенство Йенсена [1], которое включает понятие вогнутой (выпуклой) функции.

Условие. Даны действительные положительные числа *a,b,c,* такие, что *a+b+c=1*. Докажите неравенство: $\frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(a+c)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{8}$ *(TST for IMO-2014,Belarus).*

Решение. Требуется доказать: $\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{c^3}{(1-c)^2}\geq\frac{9}{8}$.

$f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$, $f''(x)=\frac{6x}{(1-x)^4}>0$ при $x>0$).

$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$, что равносильно $\frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(a+c)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{8}$

И снова можно убедиться, что знание опорного неравенства помогает получить быстрое и лаконичное решение задачи.

Дополнением к неравенству Йесена оказалось неравенство Караматы и неравенство Юнга. И здесь мы также нашли задачи, решение которых предполагает знание указанных неравенств. Еще нами изучено неравенство Минковского для сумм, неравенство Шура, а также неравенство Коши-Буняковского [2] $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2$, его альтернативная запись $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$. Не оставили в стороне и следствия из неравенства о средних и неравенства Шура. Но наибольший интерес вызвало у нас неравенство Гёльдера

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Найдя для него обобщение, мы пришли к выводу, что доказательство обобщения возможно построить, используя метод математической индукции, над чем и работаем в настоящее время. Данный метод доказательства не был нами найден среди предложенных в различных источниках.

Заключение. Исходя из вышесказанного, видим, что знание простейших неравенств школьной программы помогает справиться со сложными олимпиадными задачами и при этом потратить на решение не так много времени, как если бы мы искали другой способ. Работа с неравенствами значительно расширила наши знания по математике. Уверены, что данному разделу в дальнейшем будет уделено гораздо больше внимания, так как задачи такой тематики позволяют увлечься предметом, раскрыть всю красоту задач на доказательство, систематизировать полученные ранее знания.

1. http://kvant.mccme.ru/pdf/2000/04/kv0400ijboldin.pdf.
2. http://ru.solverbook.com/spravochnik/reshenie-neravenstv/neravenstvo-koshi-bunyakovskogo.