

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Укажите количество простых чисел, принадлежащих промежутку $[1; 19]$. ОТВЕТ: _____

№2. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - 3,5 - 5x^2$. ОТВЕТ: _____

№3. Дана функция $y = \frac{x}{2} + 2$. Чему равна площадь треугольника, который образуется графиком этой функции и осями координат? ОТВЕТ: _____

№4. В треугольнике ABC $\angle A = 65^\circ$, $\angle C = 55^\circ$. Высоты треугольника пересекаются в точке O . Найдите величину угла AOC . ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Число 17 надо было умножить на двузначное число, но по ошибке ученик не заметил знака умножения и посчитал, что уже получил ответ. На самом деле истинное произведение на 420 меньше полученного четырёхзначного числа. Найдите двузначное число. ОТВЕТ: _____

№6. Две медианы равнобедренного треугольника взаимно перпендикулярны. Боковая сторона равна $\sqrt{10}$. Найдите площадь треугольника. ОТВЕТ: _____

№7. Пусть $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 2$. Найдите $x_1^4 + x_2^4$ ОТВЕТ: _____

№8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - xy - y = 5, \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Четыре числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 112, сумма средних чисел равна 48. Найдите сумму большего и меньшего из этих чисел. ОТВЕТ: _____

№10. Найдите значение выражения $A = \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+8x+12} + \frac{1}{x^2+16x+60}$ при $x = \sqrt{39} - 4$. ОТВЕТ: _____

№11. Параболы $y = -5(x - 3)^2 + 4$ и $y = ax^2 + bx + c$ симметричны относительно прямой, проходящей через их общую вершину параллельно оси абсцисс. Найдите сумму коэффициентов a, b, c ОТВЕТ: _____

№12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE, CK . Площади треугольников BEK, ABC равны $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$ соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BEK , если $AC = 3\sqrt{2}$ ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Около окружности, радиус которой равен 10, описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно 12. Найдите длину боковой стороны трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите разность между суммой корней уравнения и их произведением $\frac{(x+1)^2 \cdot x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{12}{49}$.

ОТВЕТ: _____

№15. Вершины B и C при основании равнобедренного треугольника ABC соединены с серединой M его высоты, проведённой из вершины A . Эти прямые пересекают боковые стороны AC, AB треугольника в точках D, E соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $AEMD$, если площадь треугольника ABC равна 186 **ОТВЕТ:** _____

№16. От пристани A до пристани B вниз по течению катер проходит за 8 ч, а от пристани B до пристани A против течения – за 12 часов. Найдите время, за которое плот (не имеет собственной скорости) проплывёт от пристани A до пристани B . **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. В результате реконструкции цеха число высвободившихся рабочих заключено в пределах от 1,7 до 2,3% от общего числа рабочих в цехе. Найдите минимальное число рабочих, которые могли быть заняты в цехе до реконструкции. **ОТВЕТ:** _____

№18. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 и 8. На гипотенузе треугольнике вне треугольника построен квадрат, одна из сторон которого совпадает с гипотенузой. Вычислите расстояние от вершины прямого угла до точки пересечения диагоналей квадрата. **ОТВЕТ:** _____

№19. Решите уравнение $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 999 существует таких чисел n , что сумма цифр в их десятичной записи равна наибольшему общему делителю чисел n и $n + 6$? **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Вычислите $\frac{9}{5-\sqrt{7}} + \frac{22}{7+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. **ОТВЕТ:** _____

№2. Альбом стоил 18 рублей. После подорожания он стал стоить 23 рубля 40 копеек. На сколько процентов подорожал альбом? **ОТВЕТ:** _____

№3. Найдите площадь треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16. **ОТВЕТ:** _____

№4. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(x^2+6x+5)(x-6)^2}{1-x^2} \geq 0$ **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите модуль разности наибольшего и наименьшего корней уравнения

$(2x^2 - 5x - 1)^2 = (7x - 11)^2$. **ОТВЕТ:** _____

№6. На соревнованиях по стрельбе за попадание в цель начисляется 5 очков, а за промах – снимается 3 очка. Определите, какое наименьшее количество раз необходимо попасть в цель с 10 попыток, чтобы набрать не менее 21 очка. **ОТВЕТ:** _____

№7. Поезд прошёл с постоянной скоростью мимо всей платформы длиной 360 м за 24 с, а мимо наблюдателя, стоящего на платформе, - за 8 с. Найдите скорость поезда (в м/с). **ОТВЕТ:** _____

№8. Найдите сумму двух натуральных чисел, разность которых равна 66, а НОК равно 360. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M , а на стороне AC – точка K так, что $AM:MB = 2:1$, $AK:KC = 1:3$ и треугольник AMK – равносторонний. Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 21$. **ОТВЕТ:** _____

№10. В равнобедренную трапецию, площадь которой равна $45\frac{1}{8}$, вписана окружность. Сумма двух углов трапеции равна 60° . Найдите периметр трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№11. В сплаве олова и меди содержалось 11 кг меди. После того как добавили 7,5 кг олова, содержание олова повысилось на 33%. Найдите первоначальную массу сплава. **ОТВЕТ:** _____

№12. Найдите $b + c$, если точка $A(1; -2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$. **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 3, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 24. Найдите одиннадцатый член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны. **ОТВЕТ:** _____

№14. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 и 11. Найдите периметр треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№15.
$$\begin{cases} (x + y + 1)^2 + (x + y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$
 Решите систему уравнений. **ОТВЕТ:** _____

№16. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3, при делении на 6 дают в остатке 5 и при делении на 9 дают в остатке 2. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Из пунктов A и B , находящихся друг от друга на расстоянии $\sqrt{43}$ м, равномерно и прямолинейно движутся в пункт C две точки. Скорость первой точки равна 1 м/с, скорость второй точки равна 0,5 м/с. Найдите сумму расстояний AC и BC в метрах, если известно, что первая точка прибыла в пункт C на 5 секунд раньше второй и угол ACB равен 60° . **ОТВЕТ:** _____

№18. Андрей написал программу для компьютера: если на экране появляется число a , $a \neq -1$, то после нажатия клавиши *Enter* на экране появляется число $\frac{a-1}{a+1}$, если же на экране появляется число $a = -1$, то компьютер выводит на экран сообщение об ошибке. Андрей вывел на экран некоторое число A и последовательно нажал клавишу *Enter* 2025 раз, в результате чего на экране появилось число 1000. Чему равно число A ? **ОТВЕТ:** _____

№19. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) на гипотенузе AB отмечены точки K, L так, что $AK = KL = LB$. Найдите длину гипотенузы, если $CK^2 + CL^2 = 5$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Решите уравнение $\frac{54}{x^4 - 24x^2 + 150} = x^2 + 4\sqrt{3}x + 21$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Найдите сумму всех натуральных решений неравенства $(7 - x) \cdot (x + 8)^3 \cdot (x - 19)^2 \geq 0$.

ОТВЕТ: _____

№2. Длины диагоналей ромба являются корнями уравнения $0,1x^2 - 3,2x + 9,6 = 0$. Найдите площадь ромба. ОТВЕТ: _____

№3. Найдите значение выражения $(\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{6}{\sqrt{3}-1}) \cdot (2\sqrt{3} - 1)$. ОТВЕТ: _____

№4. Сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%? ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. График функции, заданной формулой $y = kx + b$, симметричен относительно начала координат и проходит через точку $A(4; 12)$. Найдите значение выражения $k + b$. ОТВЕТ: _____

№6. Длины двух сторон треугольника равны 5 и 6, а его площадь равна $3\sqrt{21}$. Найдите наибольшее значение, которое может принимать длина третьей стороны треугольника. ОТВЕТ: _____

№7. Найдите сумму всех натуральных чисел n , при которых выполняется равенство $\text{НОК}(n; 52) = 52$. ОТВЕТ: _____

№8. В равнобедренном треугольнике две стороны равны 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании треугольника. ОТВЕТ: _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Конфеты в коробки упаковываются рядами, причём количество конфет в каждом ряду на 4 больше, чем количество рядов. Дизайн коробки изменили, при этом добавили 3 ряда, а в каждом ряду добавили по 1 конфете. В результате количество конфет в коробке увеличилось на 39. Сколько конфет упаковывалось в коробку первоначально? ОТВЕТ: _____

№10. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка пересечения её диагоналей делит диагональ AC на отрезки длиной 4 и 1. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если площадь треугольника ABC равна 15. ОТВЕТ: _____

№11. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не кратных семи. ОТВЕТ: _____

№12. Найдите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π . ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Найдите произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$|12 - x - x^2| + 2 < 2 \cdot |3 - x| + |x + 4|$. ОТВЕТ: _____

№14. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 2, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 4. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны. ОТВЕТ: _____

№15. Решите уравнение $\frac{30x^2}{x^4+25} = x^2 + 2\sqrt{5}x + 8$. ОТВЕТ: _____

№16. Двое рабочих различной квалификации выполнили некоторую работу, причём первый проработал 7 часов, прежде чем к нему присоединился второй. Если бы сначала второй рабочий работал 7 часов, а затем к нему присоединился первый, то работа была бы закончена на 84 минуты позже. Известно, что первый рабочий четвертую часть работы выполняет на 3 часа быстрее. Чем второй выполняет третью часть работы. Сколько минут заняло выполнение всей работы?

ОТВЕТ: _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. От пристани B отплывает плот и одновременно против течения реки отходит катер. Доплыв до пристани A , находящейся на расстоянии s_1 от пристани B , катер разворачивается и плывёт к пристани C , находящейся на расстоянии s_2 вниз по течению реки от пристани B . Найдите наибольшее возможное значение скорости катера (в км/ч) в стоячей воде, при движении с которой он прибудет к пристани C не раньше, чем плот, если скорость течения реки равна 6 км/ч, а $s_1 : s_2 = 7 : 4$.

ОТВЕТ: _____

№18. Центры трёх попарно касающихся окружностей совпадают с вершинами треугольника со сторонами 5, 6 и 7. При этом две окружности касаются внешним образом и находятся внутри третьей окружности. Найдите радиус третьей окружности. ОТВЕТ: _____

№19. У Васи в кармане лежит 100 одинаковых по форме карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100 (каждое число ровно на одной карточке). Вася вынимает наугад часть карточек и смотрит, какие числа на них написаны. Какое наименьшее число карточек должен вынуть Вася, чтобы среди записанных на них чисел заведомо нашлось пять, сумма которых делится на 3? ОТВЕТ: _____

№20. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $x^2 - 3xy + 2y^2 - x = 0$. ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)№1. Найдите произведение действительных корней уравнения $(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x - 1) = 2$.**ОТВЕТ:** _____№2. Найдите радиус окружности с центром $A(2; 3)$ и проходящую через точку $B(-2; 6)$. **ОТВЕТ:** _____№3. Две стороны тупоугольного треугольника равны $\sqrt{17}$ и 5, а высота, проведённая к третьей стороне, равна 4. Найдите площадь этого треугольника. **ОТВЕТ:** _____№4. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью 84 км/ч, а вторую – со скоростью 63 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути. **ОТВЕТ:** _____**II уровень (каждая задача по 3 балла)**

№5. Если от квадрата отрезать параллельно его стороне полоску ширины 2, то площадь оставшегося прямоугольника будет на 14 меньше площади квадрата. Найдите периметр исходного квадрата.

ОТВЕТ: _____№6. Найдите сумму первых семи членов арифметической прогрессии, четвёртый член которой равен 5. **ОТВЕТ:** _____№7. В окружности радиуса 5 проведена хорда. Сумма её длины и расстояния от центра окружности до этой хорды равно 11. Найдите длину хорды. **ОТВЕТ:** _____

№8. Коля и Толя в течение недели (7 дней) собирали орехи. В понедельник они собрали поровну орехов. В каждый последующий день недели Коля собирал на 40 орехов больше, чем в предыдущий, а Толя в два раза больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что общее число орехов, собранных каждым из ребят, одно и то же. Сколько орехов собрал каждый из ребят в понедельник?

ОТВЕТ: _____**III уровень (каждая задача по 4 балла)**№9. Найдите значение выражения $\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} \cdot \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$ при $x = 0,075$ и $y = 16\frac{2}{3}$.**ОТВЕТ:** _____№10. Решите уравнение $||x^2 - 2x| - 3| = 3 - x$. **ОТВЕТ:** _____№11. Найдите количество натуральных чисел n , при которых число $\frac{3n+10}{2n-5}$ также является натуральным. **ОТВЕТ:** _____№12. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удалён от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции. **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Однажды Петя стрелял в тире, в котором действовало следующее правило: за каждое попадание в мишень стрелок получал два дополнительных бесплатных патрона, а за каждый промах у него отбирался один патрон (если, конечно, после промаха у него оставались патроны). Сколько раз Петя попал в мишень, если к концу стрельбы выяснилось, что число попаданий равно числу оплаченных им патронов, а выстрелить ему удалось 20 раз? **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведённые к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. **ОТВЕТ:** _____

№15. Найдите все натуральные числа m , при которых уравнение $x^2 - 5mx + 84 = 0$ имеет целые корни. **ОТВЕТ:** _____

№16. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из её третьего члена вычесть 4, то эти числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите три исходных числа. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Два пешехода движутся в один и тот же пункт по прямолинейным дорогам каждый со своей постоянной скоростью. В начальный момент времени положения пешеходов и пункта, в который они движутся, образуют равносторонний треугольник. После того, как первый пешеход прошёл 8 км, указанный треугольник стал прямоугольным. В момент прибытия второго пешехода в пункт назначения первому остаётся пройти ещё 12 км. Определите расстояние между пешеходами в начальный момент времени. **ОТВЕТ:** _____

№18. Среди поступающих в Лицей был проведён опрос. На вопрос: «Какой предмет вы любите больше – математику или физику?» большая часть опрошенных ответила, что математику, меньшая – что физику. Далее оказалось, что среди любителей физики 85% предпочитают задачи по термодинамике, а остальные 15% - по механике. Среди любителей математики 56,25% любят задачи по алгебре, 37,5% - по геометрии, а оставшиеся два человека – задачи по тригонометрии. Сколько поступающих в Лицей было опрошено? **ОТВЕТ:** _____

№19. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, M так, что AK, DM – биссектрисы углов A, D , причём $BM = MK = KC$. Известно также, что $AB = 12, DK = 6\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма. **ОТВЕТ:** _____

№20. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству $x^3 + y^3 = 27 - 9xy$. Найдите все возможные значения суммы $x + y$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Электронные часы показывают цифры часов и минут (например, 21:16). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах? **ОТВЕТ:** _____

№2. Вычислите $x^3y + xy^3$, если известно, что $x - y = 4, xy = 3$. **ОТВЕТ:** _____

№3. Найдите значение выражения $2\sin 240^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ - \cos 540^\circ$. **ОТВЕТ:** _____

№4. Одно число больше другого на 44. При делении чисел в частном получается 2, а в остатке 15. Найдите эти числа. **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите полусумму трёх чисел, если первое относится ко второму как 4,5:3,75 и составляет 40% третьего, а сумма второго и третьего равна 400. **ОТВЕТ:** _____

№6. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 24 и 12. Найдите радиус круга. **ОТВЕТ:** _____

№7. Вычислите $\cos(2\arctg 0,5)$. **ОТВЕТ:** _____

№8. В тетраэдре $ABCD$ $AB = BC, AD = DC$. Найдите угол между прямыми AC, BD . **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Найдите произведение корней (или корень) уравнения $\frac{4x-4}{x+2} - 4\sqrt{\frac{5x+2}{x+2}} + \frac{5x+2}{x-1} = 0$. **ОТВЕТ:** _____

№10. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$. Перпендикуляр AP к стороне CD делит её на отрезки 12 и 3, считая от большего основания, равного 20. AB и CD пересекаются в точке K . Найдите длину BK .

ОТВЕТ: _____

№11. Найдите значение выражения $\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$. **ОТВЕТ:** _____

№12 Найдите множество значений функции $y = 4 + \frac{7}{-3x^2+6x-10}$. **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической. А если после этого последнее число увеличить на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите третье число исходной прогрессии. **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{9x - 20 - x^2} \cdot (\cos 2x - 5\sqrt{3}\sin x - 7) = 0$. **ОТВЕТ:** _____

№15. Имеются два слитка сплава олова с медью. Первый слиток содержит 230 г олова и 20 г меди, а второй слиток – 240 г олова и 60 г меди. От каждого слитка отрубили по куску, сплавив их и получили 300 г сплава. Сколько граммов отрубили от первого слитка, если в полученном сплаве было 84% олова? **ОТВЕТ:** _____

№16. Дан многочлен $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$, коэффициенты которого целые числа, $a > 0, b < 0$. Известно, что $P(-1) = -1$, один из корней многочлена равен $-1,5$, а два другие – противоположные действительные числа. Найдите значение выражения $a \cdot c + b$. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Найдите наименьшее значение выражения $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$. **ОТВЕТ:** _____

№18. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) из вершины C на гипотенузу AB опущены высота CD и биссектриса CM , длины которых равны соответственно 6 и 8. Найдите площадь треугольника ABC . **ОТВЕТ:** _____

№19. Найдите, при каких x пересекаются графики функций $y = 12 + 2x\sqrt{x - \frac{12}{x}}$ и $y = x^2 + x$, укажите в ответе произведение найденных x . **ОТВЕТ:** _____

№20. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашены в один из трёх цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице? **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Сколько существует натуральных чисел n , для которых значение выражения $n^2 + 2n + 1$ является чётным трёхзначным числом? **ОТВЕТ:** _____

№2. Трёхзначное число оканчивается цифрой 6. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет на 9 меньше увеличенного в 4 раза первоначального числа. Найдите первоначальное число. **ОТВЕТ:** _____

№3. Острый угол ромба в 5 раз меньше его тупого угла. Найдите отношение длины стороны ромба к высоте. **ОТВЕТ:** _____

№4. Укажите количество целых значений x , при которых выражение $\sqrt{5 - 0,2(3x - 5)} - \frac{7-x}{\sqrt{0,6(x+2)+3}}$ имеет смысл. **ОТВЕТ:** _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения $4\cos(36^\circ + 2x)\cos(54^\circ - 2x) = -\sqrt{3}$, принадлежащих отрезку $[0; 180^\circ]$. **ОТВЕТ:** _____

№6. На рынок для продажи привезли 3 ящика яблок. Из первого ящика продали половину яблок, из второго ящика продали $\frac{2}{3}$, а третий ящик, в котором была $\frac{1}{3}$ всех яблок, продали весь. Сколько процентов яблок продали, если всего яблок осталось в полтора раза больше, чем было в первом ящике? **ОТВЕТ:** _____

№7. Чему равен наибольший член последовательности $a_n = 24 - 6n - n^2$? **ОТВЕТ:** _____

№8. Вершины треугольника делят описанную окружность в отношении 1:2:3. Наибольшая сторона треугольника равна $4\sqrt{6}$. Найдите площадь треугольника. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Двое рабочих выполнили всю работу за 13 дней, причём первые 6 дней они работали вместе, следующие 4 дня работал только первый рабочий, а заканчивал работу второй рабочий, работая один. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий, если известно, что за первые 8 дней было выполнено 75% всей работы? **ОТВЕТ:** _____

№10. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 82. Длина гипотенузы равна 58. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов этого треугольника до гипотенузы. **ОТВЕТ:** _____

№11. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 15) + 40}$. В ответе укажите произведение наименьшего значения функции и всех значений x , при которых оно достигается. **ОТВЕТ:** _____

№12 Найдите трёхзначное число, если сумма его цифр равна 9 и оно равно $\frac{36}{47}$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. **ОТВЕТ:** _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Со станции C , расположенной между станциями A и B , в 14 ч в противоположных направлениях одновременно отправляются товарный и пассажирский поезда. В 15 ч 30 мин со станции B в направлении станции A отправляется скорый поезд, который в 18 ч встречается с пассажирским. В 23 ч скорый и товарный поезда одновременно прибывают на станцию A , а пассажирский – на станцию B . Определите, во сколько раз скорость товарного поезда меньше скорости скорого поезда.

ОТВЕТ: _____

№14. Найдите сумму 10 последовательных отрицательных корней уравнения

$\sin\left(\frac{13\pi}{6} - \frac{\pi x}{8}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{3} - \frac{\pi x}{8}\right)$, включая наибольший корень. ОТВЕТ: _____

№15. В треугольнике ABC проведены высота BH и биссектриса AL . Оказалось, что $LH \parallel AB$. Найдите сторону BC этого треугольника, если $AC=2$, $AB=6$. ОТВЕТ: _____

№16. Найдите значение выражения $2a^2 + 4ab + b^2 - a - 151$, если a ; b – корни уравнения $x^2 - x - 750 = 0$. ОТВЕТ: _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} |x - y| + |x + y| \leq 6, \\ |x + 3| + |y| \leq 3. \end{cases}$ ОТВЕТ: _____

№18. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении 9:4. Найдите площадь параллелограмма
ОТВЕТ: _____

№19. В треугольнике ABC точка T – основание биссектрисы, проведенной из вершины C . Найдите градусную меру угла ACB , если $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{CT}$. ОТВЕТ: _____

№20. Запишите наименьшее десятизначное число, состоящее из цифр от 0 до 9 (каждая цифра встречается по одному разу) и делящееся на все натуральные числа от 1 до 9.
ОТВЕТ: _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

I уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Смешали раствор массой 400 г и концентрацией соли 8% с раствором массой 600 г и концентрацией соли 13%. Найдите концентрацию соли в полученном растворе (в процентах).

ОТВЕТ: _____

№2. Найдите количество диагоналей выпуклого семиугольника. **ОТВЕТ:** _____

№3. Найдите последнюю цифру, которой оканчивается сумма всех натуральных двузначных чисел.

ОТВЕТ: _____

№4. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(1; 6)$ и $B(-2; 3)$.

ОТВЕТ: _____

II уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Найдите значение выражения $\frac{a^4+1}{a^2}$, если $a + \frac{1}{a} = 4$. **ОТВЕТ:** _____

№6. Основания трапеции равны 12 и 4. Сумма углов при большем основании равна 90° . Найдите расстояние между серединами оснований данной трапеции. **ОТВЕТ:** _____

№7. Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $\cos(8\pi x) \cdot \cos\left(8\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. **ОТВЕТ:** _____

№8. Сумма первых четырёх членов геометрической прогрессии равна 80, знаменатель прогрессии равен 3. Найдите второй член геометрической прогрессии. **ОТВЕТ:** _____

III уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. Если к натуральному числу a прибавить 18, то оно увеличится менее чем на 20%. Если же к числу a прибавить 24, то оно увеличится более чем на 25%. Найдите сумму наименьшего и наибольшего возможных значений числа a . **ОТВЕТ:** _____

№10. Высоты остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке O . Найдите длину стороны AC , если высота $AD = 16$ и $AO = 12$. **ОТВЕТ:** _____

№11. Высота треугольника на 1 больше стороны, к которой она проведена. Найдите наибольшее возможное значение длины этой стороны треугольника, если известно, что его площадь не превышает 10. **ОТВЕТ:** _____

№12. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\sqrt{35 - x^2 - 2x}(x^2 + 7x + 12)(x - 12) \geq \sqrt{35 - x^2 - 2x}(x^2 - 9x - 36)(x + 3)$$

ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. Биссектриса BE и медиана AK треугольника ABC взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найдите длину меньшей стороны треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№14. Найдите сумму корней уравнения $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} = 2x - \frac{1}{4x-8}$. **ОТВЕТ:** _____

№15. Двое рабочих различной квалификации выполнили некоторую работу, причём первый проработал 8 ч, прежде чем к нему присоединился второй. Если бы сначала второй рабочий работал 8 ч, а затем к нему присоединился первый, то работа была бы закончена на 96 мин позже. Известно, что первый рабочий седьмую часть работы выполняет на 3 ч быстрее, чем второй выполняет шестую часть работы. Сколько минут заняло выполнение всей работы? **ОТВЕТ:** _____

№16. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10, а в остатке – некоторое число. Если же это число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, опять разделить на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке – то же число. Найдите первоначальное двузначное число. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Точка, взятая внутри правильного треугольника, удалена от его вершин на 3, 4 и 5. Найдите сторону треугольника. **ОТВЕТ:** _____

№18. Найдите произведение корней уравнения $x - \sqrt{x^2 - 16} = \frac{(x-4)^2}{2x+8}$ **ОТВЕТ:** _____

№19. В шестизначном числе первая цифра 2. Если её перенести в конец числа, не изменяя порядка остальных цифр, то полученное число будет втрое больше исходного. Найдите исходное число. **ОТВЕТ:** _____

№20. Известно, что числа x и y удовлетворяют условию $\frac{x}{2y} + \frac{9y}{2x} + \frac{18xy}{x^2+9y^2} = 6$. Найдите наименьшее значение выражения $(x - 7)^2 + 3xy$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									

Фамилия, имя _____

Класс _____

І уровень (каждая задача по 2 балла)

№1. Длина обода первого колеса коляски равна 64 см, а второго – 8 дм. Какое наименьшее расстояние (в см) должны прокатиться эти колёса, чтобы каждое из них сделало целое количество оборотов?

ОТВЕТ: _____

№2. Чему равен внутренний угол правильного десятиугольника? ОТВЕТ: _____

№3. Вычислите $\frac{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}$. ОТВЕТ: _____

№4. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 2. Найдите площадь круга, описанного вокруг этого треугольника. ОТВЕТ: _____

ІІ уровень (каждая задача по 3 балла)

№5. Сумма пяти последовательных натуральных чётных чисел равна 10080. Чему равно наибольшее из этих чисел? ОТВЕТ: _____

№6. Вычислите $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$. ОТВЕТ: _____

№7. В ящике лежат носки, из которых $\frac{1}{3}$ составляют носки белого цвета, а 5 носков – чёрного цвета. Сколько носков находится в этой коробке, если 50% из них не белые и не чёрные? ОТВЕТ: _____

№8. Вычислите $\sin^2(\operatorname{arctg} 2) + \sin^2(\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 2)$. ОТВЕТ: _____

ІІІ уровень (каждая задача по 4 балла)

№9. В классе число отсутствующих учеников составляет одну восьмую часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно одной пятой присутствующих. Сколько учеников в классе? ОТВЕТ: _____

№10. Вершины A, B, D параллелограмма $ABCD$ лежат на окружности, которая делит большую диагональ на отрезки, длины которых равны 12 и 4. Вычислите площадь параллелограмма, если $AB = BD = \sqrt{2}BC$. ОТВЕТ: _____

№11. Решите уравнение $3\sin^2\left(5\pi - \frac{x}{2}\right) - \frac{7}{2}\sin x + 2\cos^2\left(\frac{x}{2} - 3\pi\right) = 0$ и вычислите значение выражения $A = \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}$, где x_1 – это меньший, x_2 – больший его корень на промежутке $(0; \pi)$. ОТВЕТ: _____

№12. В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция с меньшим углом 30° и большей из непараллельных сторон, равной 12. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом. Найдите объём этой пирамиды, если её боковая поверхность равна 90.

ОТВЕТ: _____

IV уровень (каждая задача по 6 баллов)

№13. При каком значении a один из корней уравнения $(a^2 - a - 1)x^2 - (2a + 2)x + 8 = 0$ в два раза больше, чем другой? **ОТВЕТ:** _____

№14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle B = 108^\circ$. Найдите длину биссектрисы AA_1 , если длина биссектрисы $BB_1 = 12$. **ОТВЕТ:** _____

№15. Найдите удвоенное произведение всех различных корней уравнения $(\sqrt{2x - 2} - \sqrt{x + 3}) \cdot (\sqrt{x + 3} + 3) = x - 5$. **ОТВЕТ:** _____

№16. Через середину диагонали куба, площадь боковой поверхности которого равна $6\sqrt{3}$, проведена плоскость, перпендикулярная диагонали. Найдите площадь фигуры, которая получается в сечении куба этой плоскостью. **ОТВЕТ:** _____

V уровень (каждая задача по 10 баллов)

№17. Имеется два различных сплава меди со свинцом. Если взять 1 кг первого сплава и 1 кг второго сплава и переплавить их, то получится сплав, содержащий 65% меди. Известно, что если взять два произвольных куска: кусок A и кусок B первого и второго сплавов соответственно, имеющих суммарную массу 7 кг, и переплавить их, то получится сплав с содержанием 60% меди. Какова масса меди, содержащейся в сплаве, получившимся при переплавке куска первого сплава, равного по массе куску B , и куска второго сплава, равного по массе куску A ? **ОТВЕТ:** _____

№18. Найдите произведение abc натуральных чисел a, b, c , если $2abc + 2ab + 2ac - bc + 2a - b - c = 2006$. **ОТВЕТ:** _____

№19. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = BD, BC = AC, AD = DC$. Найдите AB , если $DC = 1$. **ОТВЕТ:** _____

№20. Найдите хотя бы одно решение ребуса $КОЛ \cdot КОЛ = ПРИКОЛ$. **ОТВЕТ:** _____

Для проверки:

1		5		9		13		17	
2		6		10		14		18	
3		7		11		15		19	
4		8		12		16		20	
ИТОГ									